

LINEARE ALGEBRA BASICS

1 Spektraltheorie / Eigentheorie

Wir betrachten eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir nennen einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ einen **Eigenvektor** mit zugehörigem **Eigenwert** λ wenn die folgende sogenannte **Eigenwertgleichung** erfüllt wird

$$Av = \lambda v.$$

Intuitiv wird damit v durch A nur um den Faktor λ gestreckt/gestaucht.

Analog gilt auch, dass

$$Av - \lambda v = (A - \lambda I_{n \times n})v = 0.$$

Also muss v im Kern von der Matrix $A - \lambda I_{n \times n}$ liegen. Somit findet man also die Eigenvektoren zu einem zugehörigen Eigenwert.¹

Damit so ein Vektor im Kern existieren kann muss die Matrix $A - \lambda I_{n \times n}$ insbesondere nicht vollen Rang haben bzw. nicht invertierbar sein. Also muss die Determinante null sein. Daher folgt die folgende Gleichung für einen Eigenwert λ

$$\det(A - \lambda I_{n \times n}) = 0.$$

Das ist ein Polynom n -ter Ordnung (wobei die Matrix Dimension $n \times n$ hat) und man nennt es **charakteristisches Polynom** der Matrix A . Die Nullstellen davon sind dann genau die Eigenwerte.

Bemerkung 1.1 (DIAGONALMATRIX)

Bei einer Diagonalmatrix stehen die Eigenwerte einfach direkt auf der Diagonalen.

Denn sei

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Dann gilt für die Standardbasisvektoren e_i :

$$De_i = \lambda_i e_i.$$

Also ist jeder e_i ein Eigenvektor mit Eigenwert λ_i . Somit sind genau die Diagonaleinträge die Eigenwerte. Damit folgt auch direkt das schöne Resultat, dass die Determinante einer Diagonalmatrix genau dem Produkt der Eigenwerte entspricht.

Beispiel 1.2 (EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN EINER 2×2 MATRIX BERECHNEN)

Gegeben sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zuerst finden wir das charakteristische Polynom und damit die Eigenwerte als die Nullstellen davon.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1.$$

¹Es ist wichtig zu bemerken, dass so ein Vektor natürlich nicht eindeutig ist, weil jedes Vielfache auch ein Eigenvektor ist. Das spielt aber keine Rolle. Die Vektoren haben dann unterschiedliche Länge aber dieselbe Richtung. Man nennt diese Richtung als eindimensionalen Untervektorraum auch Eigenraum. Ein Eigenwert kann auch mehrere Eigenvektoren haben und damit auch einen höherdimensionalen zugehörigen Eigenraum. Es gibt auch die Theorie der Jordan-Normalform, der die Eigentheorie zu verallgemeinerten Eigenräumen verbessert.

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Damit erhalten wir die Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Als nächstes suchen wir die zugehörigen Eigenvektoren. Wir suchen also jeweils einfach einen Vektor im Kern der zugehörigen Matrix $A - \lambda_i I_{n \times n}$, denn das ist dann genau ein Eigenvektor von λ_i . Wir suchen also in beiden Fällen für $\lambda = 1, 3$ Vektoren v im Kern von $A - \lambda_i I_{n \times n}$:

Für $\lambda = 1$:

$$(A - I)v_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Für $\lambda = 3$:

$$(A - 3I)v_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2 Definitheit

Definition 2.1 (DEFINITHEIT)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Die zugehörige Bilinearform ist gegeben durch

$$x^T A x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann heißt A :

(1) **Positiv definit**, wenn

$$x^T A x > 0 \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

(2) **Negativ definit**, wenn

$$x^T A x < 0 \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

(3) **Indefinit**, wenn es $x, y \neq 0$ gibt mit

$$x^T A x > 0 \quad \text{und} \quad y^T A y < 0.$$

(4) **Ausgeartet**, wenn es ein $x \neq 0$ gibt, sodass $x^T A x = 0$.

Bemerkung 2.2

Merke, dass wir im folgenden Teil nur die Hesse-Matrix betrachten und diese nach dem Satz von Schwarz immer symmetrisch ist.

Satz 2.3 (DEFINITHEIT EINER SYMMETRISCHEN MATRIX ÜBER DIE EIGENWERTE)

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt:

(1) **Positiv definit**, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.

(2) **Negativ definit**, wenn alle Eigenwerte negativ sind.

(3) **Indefinit**, wenn mindestens ein Eigenwert positiv und mindestens ein Eigenwert negativ ist.

(4) **Ausgeartet**, wenn null ein Eigenwert ist.

Damit ist die Definitheit einer Matrix also eindeutig über die Vorzeichen ihrer Eigenwerte bestimmt. In der Praxis kann man sehr häufig anstatt alle Eigenwerte auszurechnen, auch das Sylvester-Kriterium

(siehe Methode 2.4) nutzen. Dieses nutzt die führenden Hauptminoren einer Matrix. Ein führender Hauptminor ist die Determinante der entsprechenden kleineren quadratischen Matrizen startend in der linken oberen Ecke der Matrix. Bei einer 2×2 Matrix sind das also einfach der obere linke Eintrag und die Determinante der 2×2 Matrix.

Rechenmethode 2.4 (SYLVESTER-KRITERIUM/ HAUPTMINOREN-KRITERIUM)

Das **Sylvester-Kriterium** (auch Hauptminorenkriterium) ist eine einfache Rechenmethode, ob eine Matrix positiv oder negativ definit ist. Zur Bestimmung der Definitheit einer symmetrischen $n \times n$ -Matrix A geht man wie folgt vor:

1. Bestimme alle führenden Hauptminoren der Matrix.
2. Sind alle führenden Hauptminoren H_i positiv, so ist die Matrix **positiv definit**.
3. Ist der erste Hauptminor H_1 negativ, der zweite Hauptminor H_2 positiv, H_3 wieder negativ und geht dieser Vorzeichenwechsel immer weiter, so ist die Matrix **negativ definit**.

Sind alle führenden Hauptminoren ungleich Null und beliebige Vorzeichenwechsel drin, so ist die Matrix **indefinit**. Das ist allerdings nur ein hinreichendes und kein notwendiges Kriterium. Falls führende Hauptminoren Null sind liefert das Kriterium keine Aussage über Definitheit. Hier muss man die Eigenwerte verwenden.

Bemerkung 2.5

Es sei hier direkt erwähnt das dieses Kriterium genau das in der Vorlesung gesehene Kriterium ist, wenn man einfach den Spezialfall der 2×2 Hesse-Matrix einsetzt.

$$Hf = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix},$$

denn der erste führende Hauptminor ist einfach f_{xx} und der zweite ist $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2$. Das wird in der Vorlesung auch *Diskriminante* Δ genannt.

Beispiel 2.6 (DEFINITHEIT 2×2)

Wir wollen die Definitheit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

bestimmen. Den ersten Hauptminor lesen wir einfach ab, denn es ist der Eintrag oben links:

$$H_1 = 1 > 0$$

Wir berechnen die Determinante der zweiten Teilmatrix (H_2):

$$H_2 = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2 > 0$$

Beide führenden Hauptminoren sind positiv, die Matrix A ist also **positiv definit**.

Beispiel 2.7 (DEFINITHEIT 2×2)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Zuerst bestimmen wir die führenden Hauptminoren.

Der erste Hauptminor ist:

$$H_1 = -2 < 0$$

Der zweite Hauptminor ist die Determinante:

$$H_2 = (-2)(-3) - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5 > 0$$

Die Vorzeichen wechseln also:

$$H_1 < 0, \quad H_2 > 0.$$

Nach dem Sylvester-Kriterium ist die Matrix A somit **negativ definit**.

Beispiel 2.8 (DEFINITHEIT 2×2)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Der erste Hauptminor ist:

$$H_1 = 1 > 0$$

Der zweite Hauptminor:

$$H_2 = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -1 - 4 = -5 < 0$$

Da die Vorzeichen nicht die Bedingungen des Sylvester-Kriteriums erfüllen, ist die Matrix **indefinit**.